



ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
Τετάρτη 17 Ιουνίου 2020  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΟΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 76 (Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών)

**A2.** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$  του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο  $(a, \beta)$  και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$$

**A3. (α) Ψ**

**(β)** Για παράδειγμα η συνάρτηση  $f(x) = x^3$  αν και είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , εντούτοις έχει παράγωγο  $f'(x) = 3x^2$  η οποία δεν είναι θετική σε όλο το  $\mathbb{R}$  αφού  $f'(0) = 0$ .

**A4.**

- α) Λάθος
- β) Σωστό
- γ) Σωστό
- δ) Σωστό
- ε) Σωστό

## ΘΕΜΑ Β

$$\mathbf{B1.} \quad A_{f \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } e^x > 1\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x > 0\}$$

$$\text{Επομένως } A_{f \circ g} = (0, +\infty) \text{ και } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$$

$$\mathbf{B2.} \quad \text{Ας ονομάζουμε για λόγους απλότητας } h(x) = (f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}, x > 0$$

Για κάθε  $x > 0$  η  $h$  παραγωγίσιμη με  $h'(x) = \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$  για κάθε  $x > 0$  άρα η

$h$  γνησίως φθίνουσα στο  $A_h = (0, +\infty)$  οπότε 1-1 επομένως αντιστρέφεται .

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της το οποίο θα είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης .

Η  $h$  συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $A_h = (0, +\infty)$  με σύνολο τιμών

$$h(A) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow 0} h(x) \right) = (1, +\infty)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της  $h^{-1}$  είναι το  $A_{h^{-1}} = (1, +\infty)$

$$h(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = y \Leftrightarrow e^x + 2 = ye^x - y \Leftrightarrow ye^x - e^x = y + 2 \Leftrightarrow e^x = \frac{y + 2}{y - 1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y + 2}{y - 1}\right), y > 1$$

$$\text{Επομένως } h^{-1}(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x + 2}{x - 1}\right), x > 1$$

$\mathbf{B3.}$  Για κάθε  $x > 1$  η  $\varphi(x) = \ln\left(\frac{x + 2}{x - 1}\right)$  ισοδύναμα γράφεται

$\varphi(x) = \ln(x + 2) - \ln(x - 1)$  η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $A_\varphi = (1, +\infty)$  με

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x - 1} = \frac{-3}{(x + 2)(x - 1)} < 0 \text{ για κάθε } x > 1 \text{ άρα η } \varphi \text{ γνησίως}$$

φθίνουσα στο  $A_\varphi = (1, +\infty)$

**B4.**  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ , θέτουμε  $u = \frac{x+2}{x-1}$ ,  $x > 1$  άρα  $u_0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = +\infty$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ , θέτουμε  $u = \frac{x+2}{x-1}$ ,  $x > 1$  άρα  $u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \lim_{u \rightarrow 1^+} \ln u = 0$

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Εφόσον η  $f$  συνεχής στο  $A_f = \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right)$  θα είναι συνεχής στο  $x=0$  και θα

ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

Δηλαδή  $1 - \ln \lambda = \lambda \Leftrightarrow \ln \lambda + \lambda - 1 = 0, \lambda > 0$ ,

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = \ln x - x + 1, x > 0$  η οποία είναι παραγωγίσιμη

στο  $A_g = (0, +\infty)$  με  $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 > 0$  για κάθε  $x > 0$  άρα η  $g$  είναι γνησίως

αύξουσα στο  $A_g = (0, +\infty)$  και επειδή η εξίσωση  $g(x) = 0$  έχει προφανή λύση την  $x=1$ , λόγω μονοτονίας θα είναι μοναδική.

Άρα  $\ln \lambda + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow g(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

**Γ2.** Άρα η συνάρτηση είναι :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \sigma \nu \nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Θα βρούμε την παράγωγο της  $f$  στο  $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x(1-x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x + \sigma \nu \nu x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\eta \mu x}{x} + \frac{\sigma \nu \nu x - 1}{x} \right) = 1 + 0 = 1$$

Άρα  $f'(0)=1$ , επομένως ορίζεται η εφαπτομένη της  $f$  στο  $x=0$  και επειδή  $f'(0)=1$  η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  είναι ίση με  $\frac{\pi}{4}$

**Γ3.** Κρίσιμα σημεία της  $f$  πλέον είναι μόνο (αν υπάρχουν) τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία η παράγωγος κάνει μηδέν

$$\text{Για } x < 0 \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$$

$$\text{Για } x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \quad f'(x) = \sin x - \eta\mu x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = \frac{5\pi}{4}$$

Άρα τα μοναδικά κρίσιμα σημεία της είναι  $x = \frac{\pi}{4}$  και  $x = \frac{5\pi}{4}$

**Γ4.** Η εξίσωση εφαπτομένης της  $f$  στο σημείο  $M$  είναι  $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$

Το σημείο τομής με τον άξονα  $x'x$  θα βρεθεί αντικαθιστώντας στη εξίσωση της εφαπτομένης  $y=0$  άρα:  $-\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}(x-\alpha) \Leftrightarrow x-\alpha = \alpha-1 \Leftrightarrow x = 2\alpha-1$

Άρα  $B(2\alpha-1, 0)$

$$x(t) = 2\alpha(t) - 1 \quad \text{οπότε} \quad x'(t) = 2\alpha'(t) = -\frac{2}{3}\alpha(t)$$

$$\text{Για } t = t_0 \quad \text{έχουμε} \quad x'(t_0) = -\frac{2}{3}\alpha(t_0) = \frac{2}{3}$$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = e^x + 2x - e$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει μία μόνο ρίζα και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτής .

Πράγματι :  $f''(x) = e^x + 2 > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  άρα η  $f'$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  .

Επίσης η  $f'$  συνεχής στο  $[0,1]$  και  $f'(0) = 1 - e < 0$  ενώ  $f'(1) = 2 > 0$  άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(0,1)$

δηλαδή υπάρχει  $x_0 \in (0,1)$  τέτοιο ώστε  $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0$  **(1)**

το  $x_0$  μοναδικό διότι η  $f'$  γνησίως αύξουσα .

Το πρόσημο της  $f'$  είναι :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) \stackrel{f': \text{γνησίως αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x > x_0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) \stackrel{f': \text{γνησίως αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x < x_0$$

Επομένως η  $f$  στο διάστημα  $A_1 = (-\infty, x_0]$  είναι γνησίως φθίνουσα ,ενώ στο διάστημα  $A_2 = [x_0, +\infty)$  είναι γνησίως αύξουσα .Στη θέση  $x_0$  παρουσιάζει ελάχιστο το  $f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 + 2$ .

$x \geq x_0 \stackrel{f: \text{γνησίως αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(x_0)$  και  $x \leq x_0 \stackrel{f: \text{γνησίως φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(x_0)$  άρα έχει ολικό ελάχιστο .

$$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 - 1 \text{ και από την (1) } e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$$

$$\text{Αντικαθιστώντας προκύπτει } f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$$

## Δ2.

### Α-τρόπος

Για το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left( \frac{1}{x - x_0} \right) \right]$  έχουμε :

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$  διότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$  και  $f(x) > f(x_0)$  για κάθε  $x \neq x_0$
- $\left[ \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left( \frac{1}{x - x_0} \right) \right] \geq \frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1$  και επειδή  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \right) = +\infty$  άρα  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left( \frac{1}{x - x_0} \right) \right] = +\infty$

### Β-τρόπος

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left( \frac{1}{x - x_0} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} \left[ 1 + (f(x) - f(x_0)) \eta\mu \left( \frac{1}{x - x_0} \right) \right]$$

Ισχύει :  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$  διότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$  και για

$$x \rightarrow x_0 \quad f(x) > f(x_0)$$

$$\text{Επίσης} \quad \left| (f(x) - f(x_0)) \eta\mu \left( \frac{1}{x - x_0} \right) \right| = |f(x) - f(x_0)| \cdot \left| \eta\mu \left( \frac{1}{x - x_0} \right) \right| \leq |f(x) - f(x_0)|$$

Άρα  $-(f(x) - f(x_0)) \leq (f(x) - f(x_0)) \eta\mu \left( \frac{1}{x - x_0} \right) \leq f(x) - f(x_0)$  και από κριτήριο

$$\text{παρεμβολής} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) \eta\mu \left( \frac{1}{x - x_0} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} \left[ 1 + (f(x) - f(x_0)) \eta\mu \left( \frac{1}{x - x_0} \right) \right] = (+\infty)(1 + 0) = +\infty$$

**Δ3.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) + x - x_0$  η οποία είναι συνεχής στο  $[x_0, 1]$  και  $g(1) = f(1) + 1 - x_0 = 1 - x_0 > 0$  ενώ  $g(x_0) = f(x_0) < 0$  διότι  $x_0 < 1$  και η  $f$  γνησίως αύξουσα άρα  $f(x_0) < f(1) \Leftrightarrow f(x_0) < 0$ , άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση  $g(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα  $\rho$  στο  $(x_0, 1)$  δηλαδή  $g(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) = x_0 - \rho$ , η ρίζα είναι μοναδική διότι  $g'(x) = f'(x) + 1 > 0$  διότι  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x > x_0$  (ερώτημα Δ1).

**Δ4.** Η προς απόδειξη σχέση ισοδύναμα γίνεται :

$$f(x_0) > f(\rho)(f'(k) + 1) \Leftrightarrow f(x_0) > (x_0 - \rho)(f'(k) + 1) \Leftrightarrow f'(k) + 1 > \frac{f(x_0)}{x_0 - \rho}, x_0 < \rho$$

$$\text{Άρα } f'(k) > \frac{f(x_0)}{x_0 - \rho} - 1 \Leftrightarrow f'(k) > \frac{f(x_0) - x_0 + \rho}{x_0 - \rho} \Leftrightarrow f'(k) > \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} \quad (\mathbf{A})$$

Αρκεί να αποδείξουμε την **(A)**

Εφαρμόζουμε Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα  $[x_0, \rho]$  άρα υπάρχει

$$\xi \in (x_0, \rho) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0}$$

$$\text{Άρα : } \xi < k \Leftrightarrow f'(\xi) < f'(k) \Leftrightarrow \frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0} < f'(k), \text{εφόσον } f' \text{ γνησίως αύξουσα}$$